

非 Noether 環上におけるホモロジー代数について

Ryoya Ando
安藤遼哉

Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Tokyo University of Science

2022/03/04

① 可換環論におけるホモロジカルな研究

② Weakly proregular sequences

③ p-grade

④ 非 Noether 環のクラスの例

- 可換環論の研究は、現状イデアル論的、ホモロジー代数的、組合せ論的な手法に大別することができる。もちろん各手法は断絶しているのではなく、相互に関連しながら発展している。
- その一例として、イデアル論的不変量とホモロジー代数的不変量との関係をしらべ、“よい”関係があるような環のクラスを探索しようという研究がある。
- 例えば、正則局所環は Krull により純粹にイデアル論的な動機で導入されたが、ホモロジー代数的観点からの研究が始まると Serre により「Krull 次元が大域次元で与えられる」というホモロジカルな特徴付けが得られた。また、ホモロジカルな道具によって UFD であることが Auslander–Buchsbaum により証明されている。

- CM(Cohen–Macaulay) 局所環は、イデアル論的なデータである Krull 次元がホモロジカルな量である depth (コホモロジー (Ext) についてのデータ) と一致する環として特徴付けられる。これは Hochster–Huneke が “the Cohen–Macaulay condition (possibly on the local rings of a variety) is just what is needed to make the theory work.” と述べているようにとてもよい性質を持っている。
- 可換環論において、Noether 局所環上の有限生成加群に関するホモロジカルな問題群のことをホモロジカル予想という (現在では多くが解決されている)。ステートメントを述べやすいものをいくつか紹介する。

Theorem 1.1 (零因子予想)

A を Noether 局所環とし, M を射影次元が有限であるような有限生成 A 加群とする. $a \in A$ が M の非零因子ならば a は A でも非零因子である.

Theorem 1.2 (Bass 予想)

A を Noether 局所環とする. 入射次元が有限な 0 でない有限生成 A 加群が存在すれば, A は CM 環である.

Theorem 1.3 (直和因子予想)

A を正則局所環とする. $A \subset S$ を A 代数で, A 加群として有限生成であるとする. このとき A は A 加群として S の直和因子となる.

環が与えられたとき、「それがどこまで CM 環に近いだろうか？」という問は自然で、その1つの形が2018年に André によって証明された Big CM 予想である。上に挙げた予想だけでなく多くのホモロジカル予想が Big CM 予想から導かれる。

Theorem 1.4 (Big CM 予想)

(A, \mathfrak{m}) を Noether 局所環とする。 A 代数 B であって、 $B \neq \mathfrak{m}B$ であり、任意の A の巴系 a_1, \dots, a_d に対して a_1, \dots, a_d は B の正則列であるようなものが存在する。

このような B を Big CM 代数という。 B は必ずしも Noether になるとは限らない。その例として、 Hochster–Huneke は標数 $p > 0$ の優秀局所整域¹ に対して、 A^+ を A の商体の代数閉包 $\overline{\text{Frac}(A)}$ における A の整閉包とすると、 A^+ が A の Big CM 代数になることを証明した。

¹優秀環とは、標語的には完備化との相性がよいような Noether 環で強鎖状であるようなもの。完備 Noether 局所環は優秀で、優秀環の局所化や優秀環上の有限生成代数は優秀であることが知られている。

このように、ホモロジカル予想など Noether 環の研究においても非 Noether 環は自然に現れてくる.

~~~~~> 非 Noether 環について調べることは Noether 環の世界を研究する上でも重要. その一例として CM 性などを非 Noether 環へ一般化する研究が [Gla95], [HM07], [KW20] などによって行われている.

## Definition 1.5 ([HM07, Definition 3.1, Definition 4.1])

$A$  を (Noether とは限らない) 環とする.  $\underline{a} := a_1, \dots, a_r \in A$  に対して,  
 $I := (a_1, \dots, a_r)$  とおく.  $\underline{a}$  が次の条件;

- ①  $\underline{a}$  は weakly proregular sequence である.
- ②  $I \neq A$  である.
- ③ 任意の  $I$  を含む素イデアル  $P$  に対して  $H_I^r(A)_P \neq 0$  である.

を満たすとき,  $\underline{a}$  は **parameter sequence** であるという.  $\underline{a}$  が **strong parameter sequence** であるとは, 任意の  $1 \leq i \leq r$  に対して  $a_1, \dots, a_i$  が parameter sequence であることをいう.

任意の strong parameter sequence が正則列であるとき,  $A$  を **Cohen–Macaulay** であるという.



parameter sequence とは Noether 環における巴系 (system of parameters) の一般化である ([HM07, Remark 3.2]).

この定義で使われている weakly proregular sequence は [Sch03] によって導入されたもので、局所コホモロジーを Čech コホモロジーで計算できるようにするものである。

- ① 可換環論におけるホモロジカルな研究
- ② Weakly proregular sequences
- ③ p-grade
- ④ 非 Noether 環のクラスの例

Noether 環論において、次の定理はよく知られている。

### Theorem 2.1

$A$  を Noether 環とする.  $\underline{a} = a_1, \dots, a_r \in A$  とそれが生成するイデアル  $I = (a_1, \dots, a_r)$  に対して、任意の  $M \in \text{Mod}(A)$  に対して関手的な同型；

$$H_I^i(M) \cong \check{H}^i(\underline{a}, M)$$

が存在する。

Noether 性を外すと何が起こるだろうか？

~~~~~→ Schenzel([Sch03]) によってこの定理が拡張された。

Theorem 2.2 ([Sch03, Theorem 3.2])

A を環とする. $\underline{a} = a_1, \dots, a_r \in A$ とイデアル $I = (a_1, \dots, a_r)$ に対して, \underline{a} が *weakly proregular sequence* であることと, 任意の $M \in \text{Mod}(A)$ と $i \geq 0$ に対して関手的な同型;

$$H_I^i(M) \cong \check{H}^i(\underline{a}, M)$$

が存在することは同値である.

Definition 2.3 ([Sch03, Definition 2.3])

A を環とする. $\underline{a} = a_1, \dots, a_r \in A$ が **weakly proregular** であるとは, 任意の $1 \leq i \leq r$ と $n \geq 0$ に対して, $m \geq n$ が存在して $\varphi_{mn} : H_i(\underline{a}^m) \rightarrow H_i(\underline{a}^n)$ が 0 であることをいう. ここで $\underline{a}^n = a_1^n, \dots, a_r^n$ であり, $H_i(\underline{a})$ は \underline{a} によって定義される i 次の Koszul ホモロジー群である.

これはその名前からもわかるように proregular sequence というものの一般化になっている。

Definition 2.4 ([GM92, Definition 1.8])

A を環とする。 $\underline{a} = a_1, \dots, a_r \in A$ について、任意の $1 \leq i \leq r$ と任意の $n > 0$ に対して、ある $m \geq n$ が存在して、任意の $a \in A$ に対して $aa_i^m \in (a_1^m, \dots, a_{i-1}^m)$ ならば $aa_i^{m-n} \in (a_1^n, \dots, a_{i-1}^n)$ であるとき、 \underline{a} を **proregular sequence** という。

正則列は proregular である ($m = n$ とすればよい)。それだけでなく Koszul ホモロジーを計算することで、proregular sequence は weakly proregular になることが証明できる ([Sch03, Lemma 2.7])。

$$\text{regular} \implies \text{proregular} \implies \text{weakly proregular.}$$

A が Noether ならば任意の点列は proregular であることが確かめられ, Schenzel の定理が Theorem 2.1 の一般化であることがわかる.

さて, Schenzel は [Sch03] において Theorem 2.2 を導来圏を用いて証明した. 次の命題により, この定理は Abel 圏の言葉のみで証明することができる.

Proposition 2.5 (A.)

A を環とする. $\underline{a} = a_1, \dots, a_r \in A$ に対して, \underline{a} が weakly proregular であることと, 任意の $i > 0$ に対して $\check{H}^i(\underline{a}, -)$ が消去的 (effaceable)² な関手であることは同値である.

²Abel 圏の間の加法的関手 $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ に対して, 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対してある $M \in \mathcal{A}$ と単射 $u: A \rightarrow M$ が存在して $F(u) = 0$ であるとき, F は消去的であるという.

証明の概略

- \underline{a} を weakly proregular sequence とする. 任意の入射加群 J について $\check{H}^i(\underline{a}, J) = 0$ であることを示せばよい. 一般に $\check{H}^i(\underline{a}, J) \cong \varinjlim_n H^i(\underline{a}^n, J)$ であり, また J が入射的なので $H^i(\underline{a}^n, J) \cong \text{Hom}(H_i(\underline{a}^n), J)$ である. \underline{a} の定義を用いて Koszul ホモロジーを計算すればよい.
- 各 $n \geq 0$ に対して入射加群への埋め込み $\varepsilon : H_i(\underline{a}^n) \rightarrow J$ をとると, $\varinjlim_n H^i(\underline{a}^n, J) = 0$ であることから, 十分大きい $m \geq n$ について;

$$H_i(\underline{a}^m) \longrightarrow H_i(\underline{a}^n) \xrightarrow{\varepsilon} J$$

は零射となり ε が単射なので前の射も零射である.

- ① 可換環論におけるホモロジカルな研究
- ② Weakly proregular sequences
- ③ p-grade
- ④ 非 Noether 環のクラスの例

- 最初の節で述べた CM 性の一般化は, Noether 局所環 A に対して A が CM であることと, A の任意の巴系の一部分が正則列をなすことは同値である, という事実に着目したものだった (parameter sequence は巴系の一般化).
- A が CM であることと, 任意の真のイデアル I に対して $\text{ht } I = \text{grade}_I A$ となることは同値である. この事実に着目した一般化もできないだろうか?
~~~~→ 非 Noether の場合に grade は必ずしもうまく振る舞わず, 適切に修正を加えることが必要.

$A$  を環,  $M$  を  $A$  加群,  $I$  を  $A$  のイデアル,  $\underline{a} := a_1, \dots, a_r \in A$  とする.

$\underline{a}$ :  $M$ -possibly improper regular sequence  $\stackrel{\text{def}}{\iff} 1 \leq \forall i \leq r, a_i : M/(a_1, \dots, a_r)M$ -regular.

$I$  の元からなる極大な  $M$ -possibly improper regular sequence の長さの上限を  $\text{grade}_I(M)$  で表し, classical grade という.  $M \neq IM$  のとき  $\text{grade}_I(M) = \text{depth}_I(M)$  に注意.

## Proposition 3.1

$A$  を Noether 環,  $M$  を有限生成  $A$  加群,  $I$  を  $A$  のイデアルとする.

$$\text{grade}_I(M) > 0 \iff (0 :_M I) := \{x \in M \mid Ix = 0\} = 0.$$

これは Noether の仮定を外すと, 局所環  $(A, \mathfrak{m})$  における  $\text{grade}_{\mathfrak{m}}(A)$  についてさえ成り立たない.

## Example 1

$k$  を体とし,  $A := k[[x, y]]$ ,  $\mathfrak{m} := (X, Y)$ ,  $M := \bigoplus_{P \in \text{Ht}_1(A)} A/P$  とする.

イデアル化  $A * M$  において,  $\text{grade}_{\mathfrak{m} * M} A * M = 0$  だが  $\text{Ann } \mathfrak{m} * M = 0$  である.

( $A * M$  は直和  $A \oplus M$  に  $(a, x)(b, y) = (ab, ay + bx)$  で積を定めたもの.)

そこで [Hoc74] による polynomial grade (true grade ともよばれる) が使われる.

$$\text{p-grade}_I(M) := \lim_{n \rightarrow \infty} \text{grade}_{I[X_1, \dots, X_n]}(M[X_1, \dots, X_n])$$

Noether を仮定すると p-grade と grade は一致する ([Hoc74, Corollary of Proposition 1]). さらに Proposition 3.1 の類似が非 Noether 環においても成り立つ ([Nor76, §5.5, lemma 8]).

~~~~~> 局所環  $(A, \mathfrak{m})$  について p-grade を p-depth とかき, これを depth の代わりに使う.

- ① 可換環論におけるホモロジカルな研究
- ② Weakly proregular sequences
- ③ p-grade
- ④ 非 Noether 環のクラスの例

- 最初の節において述べたように、Noether 環の研究を行う上であっても、Noether を仮定しない環を考えることは重要である。現状では大きな環や加群を取り扱うための枠組みは十分にできているとは言えない。
- 完全に一般の非 Noether 環を考えるうえではかなりの障害がある。
 - “なんでもあり” の状況では具体例を考えても、それがエッジケースなのか、一般化できる見込みがあるのかどうかすらよくわからない。
 - 非 Noether 環のなかでも扱いやすい環のクラスを探す。それにより、そのような環のクラスのなかで具体例を考えることで、その例の性質がそのクラスで一般化されるかどうかといった問題を定式化することが可能になる。

先行研究が蓄積されてきている環のクラスをいくつか紹介する。

Definition 4.1 (接続環)

A を環とする。すべての有限生成イデアルが有限表示であるとき、 A を**接続 (coherent)** であるという。ここで、 A 加群 M が有限表示 (finitely presented) であるとは、ある n, m について完全列 $A^m \rightarrow A^n \rightarrow M \rightarrow 0$ が存在することをいう。

Noether とは限らない接続環の例としては付値環がある（付値環が Noether であることと DVR であることは同値）。

接続環をホモロジカル予想の研究に応用した先行研究として、例えば [Shi11] が接続環を用いて F -接続環（これ自体は Noether 環のクラスである）を考案し、密着閉包の議論に応用したのものがある。

Noether 局所環 A について, A が正則であることと $\text{gl.dim } A < \infty$ であることは同値であった (Serre の定理). 局所環とは限らない環 A が正則であるとは, 任意の $P \in \text{Spec } A$ について A_P が正則局所環であることをいう. A が有限次元 Noether 環であるとき, A が正則であることと $\text{gl.dim } A < \infty$ であることは同値である. 無限次元も含めると, 次が成り立つ.

Theorem 4.2

A を Noether 環とすると, A が正則環であることと, 任意の有限生成 A 加群 M について $\text{prj.dim } M < \infty$ であることは同値.

[Ber72], [Gla95] によって正則環の一般化が試みられている.

Definition 4.3 (接続正則環)

A を環とする. すべての有限生成加群が有限の射影次元を持つとき, A を正則環という. 特に A が接続であるとき, A を接続正則 (coherent regular) であるという.

最初の節において述べた Hamilton–Marley による CM 環の一般化を再掲する。

Definition 4.4

A を環とする。すべての strong parameter sequence が正則列であるとき、 A を Cohen–Macaulay であるという。また、任意の積閉集合 $S \subset A$ に対して A_S が CM であるとき、 A を locally CM であるという。

この定義のもとで；

- 連接正則環は locally CM 環である。
- 0 次元の環は CM 環である。
- 局所優秀整域 A に対する A^+ は CM 環である。

が成り立つことが [HM07] により示されている。上の 2 つの事実はちょうど Noether の場合の一般化である。

最後の事実は A^+ が Big CM 代数という “Noether CM 環の近似” の例であったことから、Hamilton–Marley の意味の CM 環がよい振る舞いをしていることを表している。

Proposition 4.5 ([KW20, Theorem 25])

A を有限次元の付値環（より広く有限次元 Prüfer 整域，すなわち射影加群の有限生成部分加群がすべて射影的であるような整域）とすると， $A[X_1, \dots, X_n]$ は *locally CM* 環である。

しかし，一般の環 A に対して「 A が CM 環ならば $A[X]$ も CM か？」という問題は Noether の場合には成り立つが，Hamilton–Marley の意味の CM 環では未解決である。

また，ここでは定義は述べないが [Mil08] が Gorenstein 性の一般化を試みており，Noether 環のクラスの包含関係；

$$\text{正則} \Rightarrow \text{Gorenstein} \Rightarrow \text{Cohen–Macaulay}$$

の類似が成り立っている。

References I

- [And21] R. Ando (2021) “A note on weakly proregular sequences”, To appear in *Moroccan Journal of Algebra and Geometry with Applications*, arXiv:2105.07652.
- [Ber72] J. Bertin (1972) “Anneaux cohérents de dimension homologique finie”, *Publ. math. inform. Rennes*, No. 4, pp. 1–12, Exposé no. 16.
- [Gla95] S. Glaz (1995) “Homological dimensions of localizations of polynomial rings”, in *Zero-dimensional Commutative Rings, John H. Barrett Memorial Lectures and Conference on Commutative Ring Theory (David F. Anderson and David E. Dobbs, eds)*, Vol. 171 of Lecture notes in pure and applied mathematics, pp. 209–222 : CRC Press.
- [GM92] J. P. C. Greenlees and J. P. May (1992) “Derived functors of I-adic completion and local homology”, *Journal of Algebra*, Vol. 149, No. 2, pp. 438–453, DOI: 10.1016/0021-8693(92)90026-I.
- [HM07] T. D. Hamilton and T. Marley (2007) “Non-Noetherian Cohen–Macaulay rings”, *J. Algebra*, Vol. 307, No. 1, pp. 343–360, DOI: 10.1016/j.jalgebra.2006.08.003.
- [Hoc74] M. Hochster (1974) “Grade-Sensitive Modules and Perfect Modules”, *Proc. London. Math. Soc.*, Vol. s3-29, pp. 55–76, DOI: 10.1112/plms/s3-29.1.55.

References II

- [KW20] Y. Kim and A. Walker (2020) “A note on Non-Noetherian Cohen–Macaulay rings”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 148, No. 3, pp. 1031–1042, DOI: 10.1090/proc/14836, arXiv:1812.05079.
- [Mil08] L. M. Miller (2008) “A Theory of Non-Noetherian Gorenstein Rings”, Ph.D. dissertation, University of Nebraska at Lincoln.
- [Nor76] D. G. Northcott (1976) *Finite free resolutions*, Vol. 71 of Cambridge tracts in mathematics : Camb. Univ. Press.
- [Sch03] P. Schenzel (2003) “Proregular sequences, local cohomology, and completion”, *Math. Scand.*, Vol. 92, No. 2, pp. 161–180, DOI: 10.7146/math.scand.a-14399.
- [Shi11] K. Shimomoto (2011) “ F -coherent rings with applications to tight closure theory”, *J. Algebra*, Vol. 338, pp. 24–34, DOI: 10.1016/j.jalgebra.2011.05.006.