Homological 予想・BCM 代数

（可換環論サマースクール at 東工大 (8/26)）

§1 Homological conjecture

… (Noetherian) local ring 上の (f.g.) module の不変量の homological な解釈に基づく一連の予想

e.g. Krull 次元 $\longleftrightarrow$ homological 次元 (proj, inj, global …)

Recall $(A, \mathfrak{m}, k)$: local ring に対して標数は4パターン

	char A	char k
equi. char 0	0	0
equi. char p	p	p
mixed. char (0, p)	0	p
mixed. char (p^n, p)	p^n	p

A : equi. char
$\iff \exists k$: fld ; $k \subset A$

A : domain
$\Rightarrow$ char A is 0 or prime

Note

mod A : Category of f.g. A-modules
Mod A : Category of A-modules

1960 ~ 1970前半

Serre, Auslander, Peskin, Szpiro, e.t.c.

代表 : (new) intersection thm.

Thm (Serre 1960, intersection thm)

A: regular local, $M, N \in \mathrm{mod}\,A$, $\ell(M \otimes N) < \infty$
then $\dim M + \dim N \leq \dim A$

(why intersection? → Har, Chap I, Prop. 7.1)

Recall Auslander-Buchsbaum formula

$(A, \mathfrak{m})$: Noe. loc. $M \neq 0 \in \mathrm{mod}\,A$, prj. dim $M < \infty$
prj. dim M + depth M = depth A

A-B formula + intersection thm

$\longrightarrow$ $\text{prj.dim}\, M = \text{depth}\, A - \text{depth}\, M$

$$= \dim A - \text{depth}\, M$$

$$\geq \dim A - \dim M \geq \dim N$$ となる.

$\rightsquigarrow$ intersection conj.

$(A, \mathfrak{m})$: Noe. local. $M \neq 0$, $N \in \text{mod}\, A$ $\ell(M \otimes N) < \infty$

then $\dim N \leq \text{prj.dim}\, M$

(何がうれしい?

$\ell(M) < \infty$, $\text{prj.dim}\, M < \infty$ なら $\dim A \leq \text{prj.dim}\, M$

$$\leq \dim A$$

$\longrightarrow$ new intersection thm (NIT)

$(A, \mathfrak{m})$: Noe. loc.

$F_\bullet : 0 \to F_m \to \cdots \to F_0 \to 0$: not exact

F_i : fin. free

$0 \leq {}^\forall i \leq m$, $\ell(H_i(F_\bullet)) < \infty \Rightarrow \dim A \leq m$

equi. char $p>0$ のとき

Frobenius functor を使って解かれた

A: char $p>0$.

$F: A \to A ; a \mapsto a^p$: Frobenius

A^F: 両側 A-module を $A^F = A$ (as set)

$a \in A,\ r \in A^F,\ a\cdot r = ar = ra.\ r\cdot a = ra^p$ とする

すると $\mathcal{F}: \mathrm{Mod}_L(A) \to \mathrm{Mod}_L(A) ; M \mapsto A^F \otimes_A M$

が定まる これを Frobenius functor という

これは free module を保ち, localisation と可換

Sketch (equi. char $p>0$ のとき)

A: complete としてよい

また $\varphi_1(F_1) \subset \mathfrak{m}F_0$ としてよい (technical だが easy)

$\mathcal{F}(F_\bullet)$ は $\varphi_i = (a_{kl})$ としたとき,

$(a_{kl}{}^p)$ を射とする複体になる.

いま, ${}^\forall p \in \mathrm{Spec}\,A \setminus \{\mathfrak{m}\}$ について, $F_\bullet \otimes A_p$ は exact

$\because$) $(A, \mathfrak{m})$: Noe. loc. $M \in \mathrm{mod}\,A$

$\ell(M) < \infty \iff \mathrm{Supp}\,M = \{\mathfrak{m}\}$

すると $\forall i$, $H_i(\mathcal{F}(F_\bullet))_p = 0$

おて $\ell(H_i(\mathcal{F}(F_\bullet))) < \infty$.

いま $\mathcal{F}(\varphi_1)(F_1) \subset m^p F_0$ なので、

$\forall e$, $\mathcal{F}^e(\varphi_1)(F_1) \subset m^{p^e} F_0$ & Homology has fin. length.

すると $I_i := \mathrm{Ann}\, H^i_m(A)$ とおくと $I_0 \cdots I_n \subset \mathrm{Ann}\, H_0(\mathcal{F}^e(F_\bullet))$

$\twoheadrightarrow F_0/mF_0$

(by Robertsの定理)

より $I_0 \cdots I_n \subset m^{p^e}$.

すると $I_0 \cdots I_n \subset \bigcap_{e \geq 1} m^{p^e} = 0$.

一方 $I_0 \cdots I_n$は非べき零元を含むので 矛 ▢

§2 DSC と MC

thm (Direct Summand Conjecture DSC)

A: reg. loc. $A \subset B$: A-alg. f.g. as A-mod

$\Rightarrow$ B は A-module として A を直和因子に持つ

cf $I \subset A$: ideal について

① $A \to B$: faithfully flat

or

② $A \subset B$: 直和因子に持つ (i.e. $A \hookrightarrow B$: split)

$\Rightarrow$ $IB \cap A = I$

① … ${}^{\forall} M \in \mathrm{Mod}\,A$, $M \to M \otimes B$: $x \mapsto x \otimes 1$ は単射なので

$A/I \to B/IB$ は単射

② … $B = A \oplus C$ とすると $IB = I \oplus IC$ より $IB \cap A = I$ //

Obs $(A, m), (B, n)$: Noe. loc. $A \subset B$. f.g. A-mod

$p' \in \mathrm{Spec}\,B$, $mB \subset p' \subset n$ とすると

$A \subset B$: integral なので $p' = n$ (lying over thm)

よって $\underline{a}$: s.o.p. of A は B の s.o.p. にもなる

Obs B: CM のとき DSC が成り立つ

∵) $A \subset B$: integral なので $\dim A = \dim B$

$\underline{a}$: s.o.p of A とすると $B\underline{a}$ s.o.p である

B: CM より $\underline{a}$: B-regular

よって $\dim A \leq \operatorname{depth}_A B = \operatorname{depth} B = d$

A: reg より $\operatorname{prj.dim}_A B < \infty$

A-B formula より

$$\operatorname{prj.dim}_A B + \operatorname{depth} B = \operatorname{depth} A$$

$\rightsquigarrow$ $\operatorname{prj.dim}_A B = 0$

B: A-flat $\Leftrightarrow$ B: A-free なので B: A-free //

thm (monomial conjecture MC)

$(A, \mathfrak{m})$: Noe. loc. $\underline{a} = a_1, \cdots, a_r$: s.o.p.

$\forall t > 0$, $a_1^t \cdots a_r^t \notin (a_1^{t+1}, \cdots, a_r^{t+1})$

- s.o.p. は "独立っぽく" ふるまうと主張している

($X_1, \cdots, X_r$ のように)

- (DSC $\Longleftrightarrow$ MC) $\Rightarrow$ NIT (new-intersection thm)

thm 1

$(A, \mathfrak{m})$: reg. loc. $\underline{a}$: reg. s.o.p.

$A \subset B$: B: A-alg, f.g. as A-mod.

A: direct summand of B

$\Longleftrightarrow$ $\forall t > 0$, $a_1^t \cdots a_r^t \notin (a_1^{t+1}, \cdots, a_r^{t+1})B$

Proof

($\Rightarrow$) $\underline{a}$: reg. なので $a_1^t \cdots a_r^t \notin (a_1^{t+1}, \cdots, a_r^{t+1})$

$\forall I \subset A$: ideal について $IB \cap A = I$ より

$a_1^t \cdots a_r^t \notin (a_1^{t+1}, \cdots, a_r^{t+1})B$ ⌟

($\Leftarrow$) A: complete としてよい.

$\forall t>0$, $I_t := (a_1^t, \dots, a_r^t)$, $A_t := A/I_t$, $B_t := B/I_tB$

いま $A \to B$ から導かれる $A_t \xrightarrow{\varphi_t} B_t$ は inj.

(∵ technical. A_t: 0-dim Gorenstein になり,

$a_1^t \cdots a_r^t + I_t \in \mathrm{Soc}\,A_t \subset \ker\varphi_t$ よ)

いま A_t: inj. A_t-module なので

$$D_t := \{\psi \in \mathrm{Hom}(B_t, A_t) \mid \psi \circ \varphi_t = \mathrm{id}_{A_t}\} \neq \phi$$

すると $(D_t)_t$ は Mittag-Leffler な集合の射影系になる.

$$\left(\begin{tikzcd} & A_t \\ A_t \arrow[ur, "\mathrm{id}"] \arrow[r, hook] & B_t \arrow[u, dashed] \end{tikzcd}\right)$$

(X_i, φ_{ij}): Mittag-Leffler

$\overset{\text{def}}{\iff} \forall i, \exists j \geq i ; \forall k \geq j, \varphi_{ki}(X_k) = \varphi_{ji}(X_j)$

(X_i, φ_{ij}): Mittag-Leffler & I: countable & $\forall i$, $X_i \neq \phi$

$$\Rightarrow \varprojlim X_i \neq \phi$$

より $\varprojlim D_t \neq \phi$ i.e. $A \to B$ は split //

Thm 3

$(A, \mathfrak{m})$: Noe. loc. $\mathfrak{q}$: $a_1, \dots, a_r$: s.o.p of A.

$\exists M \in \mathrm{Mod}\, A$; $\mathfrak{q}$: M-reg $\Rightarrow \forall t > 0$, $a_1^t \cdots a_r^t \notin (a_1^{t+1}, \dots)$

∵) $a_1^t \cdots a_r^t \in (a_1^{t+1}, \dots,)$ とする.

すると $a_1^t, \dots, a_r^t M \subset (a_1^{t+1}, \dots) M$ で, $I := (a_1, \dots, a_r)$ について

$gr_I(M) \cong M \otimes A/I [X_1, \dots, X_r]$ (← regular をここに使う)

$X_1^t \cdots X_r^t gr_I(M) \subset (X_1^{t+1}, \dots, X_r^{t+1}) gr_I(M)$

だが

$$gr_I(M)/(X_1^{t+1}, \dots) gr_I(M) \cong \bigoplus_{X_1^{e_1} \cdots X_r^{e_r} \notin (X_1^{t+1}, \dots)} X_1^{e_1} \cdots X_r^{e_r} (M/IM)$$ ↯

∟

この M こそ本質

§3 big CM conjecture

Def

$(A, \mathfrak{m})$: Noe. loc. $M \in \mathrm{Mod}\,A$

$\underline{a}$: s.o.p. について $\underline{a}$: M-reg. になるとき

M を $\underline{a}$ について big CM module という

thm (André. 2016)

$(A, \mathfrak{m})$: Noe. loc. ${}^\forall \underline{a}$: s.o.p.

${}^\exists M \in \mathrm{Mod}\,A$; $\underline{a}$: M-reg.

e.g.

k : fld. $A := k[\![X, Y]\!]$. $k[\![X]\!] = A/(Y)$: A-mod

$M := A \oplus \mathrm{Frac}(k[\![X]\!])$ について

X, Y は M-reg. だが Y, X はそうではない.

よって M は Y, X に対して big CM ではない.

Def

$^\forall \underline{a}$: s.o.p. $\underline{a}$: M-reg になるような M を balanced big CM という

Def

$\underline{a} = a_1, \dots, a_r \in A$. $I := (\underline{a})$

$M \neq IM$, $^\forall f \in M[X_1, \dots, X_r]$ 斉次,

$f(\underline{a}) \in I^{\deg f + 1} M \Rightarrow {}^\forall(\text{coeff. of } f) \in IM$

となるとき, $\underline{a}$ を quasi-M-reg. という

thm (Rees)

$\underline{a}$: reg $\Rightarrow$ $\underline{a}$: q-reg.

(松村 16.2)

Prop

$\hat{M}$: M の I での completion

TFAE :

(i) $\underline{a}$: M-q-reg

(ii) $\underline{a}$: $\hat{M}$-q-reg

(iii) $\underline{a}$: $\hat{M}$-reg

(Bruns-Herzog Thm 8.5.1)

Thm

$(A, \mathfrak{m})$: Noe. loc. $\underline{a}$: s.o.p. M : $\underline{a}$-big CM

$\hat{M}$: $\mathfrak{m}$-adic completion is balanced big CM.

∵) $r := \dim A$ のキトホー. (I-adic と $\mathfrak{m}$-adic は同じに注意)

$\underline{b}$: $b_1, \dots, b_r$: s.o.p. とする.

$\exists\ c \in A$: $a_1, \dots, a_{r-1}, c$: s.o.p.

&

$b_1, \dots, b_{r-1}, c$: s.o.p. (using Prime avoidance)

いま $a_1, \dots, a_{r-1}, c$ は M-reg. になり (最後の1つをとりかえてもよい)

$\hat{M}$-reg. になる (M-reg $\Rightarrow$ M-$\mathfrak{g}$-reg $\Rightarrow$ $\hat{M}$-reg)

すると $c, a_1, \dots, a_{r-1}$: $\hat{M}$-reg.

いまキトホーより $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{r-1} \in A/cA$ は $\hat{M}/c\hat{M}$-reg. で.

$c, b_1, \dots, b_{r-1}$ は $\hat{M}$-reg

$b_1, \dots, b_{r-1}, c$: $\hat{M}$-reg.

$b_1, \dots, b_{r-1}, b_r$: $\hat{M}$-reg. //

big CM ⇒ DSC の Sketch

<u>lem3</u>

A: domain $A \subset B$: integral ext.

$p' \in \operatorname{Spec} B$: $p' \cap A = (0)$,

A は B/p' の直和因子 ⇒ A は B の直和因子

∵)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[dr, bend right] & B \arrow[d] \\ & B/p' \arrow[ul, dashed, bend left] \end{tikzcd}$$

//

<u>Def</u>

$(A, \mathfrak{m}, k)$: Henselian local

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall f, g_0, h_0 \in A[x]$: monic.

$f - g_0 h_0 \in \mathfrak{m}A[x]$ & $(g_0, h_0) + \mathfrak{m}A[x] = A[x]$

$\Rightarrow \exists g, h \in A[x]$: monic;

$f = gh$ & $g - g_0, h - h_0 \in \mathfrak{m}A[x]$

lem 4

(A, m, k): Henselian local

$A \subset B$: integral ext. B: domain $\Rightarrow$ B: local

$\because$) $n \neq n' \in \operatorname{Spec} B$, $b \in n$, $b \notin n'$ とする.

$A \subset B$: int. ext. $\rightsquigarrow$ $^\exists f = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n \in A[X]$;

$f(b) = 0$.

$\rightsquigarrow$ $a_n = -(b^n + \cdots + a_{n-1} b) \in n \cap A = m$

もし $^\forall i$, $a_i \in m$ なら, $n' \cap A = m$ より $b^n \in n'$ となりムジュンするので,

$^\exists i$; $a_i \notin m$.

$a_n, \ldots, a_{n-(l-1)} \in m$, $a_{n-l} \notin m$ となる l をとる.

f の $k[X]$ への像は

$$X^n + \cdots + a_{n-l} X^l = X^l (\qquad)$$

となり A: Henselian なので $^\exists g, h \in A[X]$: monic;

$f = gh$, B: int. dom. より $g(b) = 0$ or $h(b) = 0$

くりかえすと次数が真にへるので, $b \in A$ となり $\lightning$

//

big CM => DSC の Sketch

A: complete としてよい.

lem 3 より B: domain, lem 4 より B: local としてよい,

$\underline{a}$: reg. s.o.p. of A とすると $\underline{a}$ は B の s.o.p でもある.

すると thm 2 より $\forall t>0$, $a_1^t \cdots a_r^t \notin (a_1^{t+1}, \dots,)B$

thm 1 より A は B の直和因子 //

Hochster は equi. char $p>0$ で big CM を示し

その後 "Meta theorem" を使って equi. char $p=0$ を示した.

まず modification を定義する.

$\underline{a} = a_1, \dots, a_r$ が M-regular とは

$0 \le s < r$ について a_{s+1} : $M/(a_1, \dots, a_s)M$-reg

であるということ.

そうでないとき、それを補正しようというアイデア.

Def

A: ring. $\underline{a} = a_1, \cdots, a_r \in A$. $M \in \mathrm{Mod}\, A$. $0 \leq s < r$

$e_1, \cdots, e_s$: (standard) basis of A^s

$\exists y \in M$: $a_{s+1} y \in (a_1, \cdots, a_s)M$ とする.

$M' := M \oplus A^s / Aw$, $w := y - \sum_{i=1}^{s} a_i e_i$ とおく.

M' を M の (y に関する) $\underline{a}$-modification of type s という.

$x \in M$ に対して, $\exists N \in \mathrm{Mod}\, A$; $\exists y \in N$;

$\exists f : M \to N$; $f(x) = y$ となるとき.

$f : (M, x) \to (N, y)$ とかく.

$(M, x) \to (M_1, x_1) \to \cdots (M_g, x_g)$ で.

(M_{i+1}, x_{i+1}) が (M_i, x_i) の s_{i+1}-$\underline{a}$-modif. と

なっているとき, この sequence を M の

$(s_1, \cdots, s_g)$-$\underline{a}$-modification sequence という.

(M_g, x_g) を M の $(s_1, \cdots, s_g)$-modif. という.

Def

(M, x) について、$x \notin \underline{a}M$ のとき、(M, x) を non-degenerate という。

Prop 5

A: Noetherian $\underline{a} = a_1, \cdots, a_r \in A$

TFAE:

(i) $\exists M \in \mathrm{Mod}\,A$: $\underline{a}$: M-regular.

(ii) $(A, 1)$ の $\underline{a}$-modif (N, y) はすべて non-degenerate.

(technical)

これらにより big CM conj を equi. char $p > 0$ で示せる。

Sketch (equi. char $p>0$ における big CM conj)

A: complete としてよい.

Prop 5 より (N, y) を (A, I) の $\underline{a}$-modif としたとき non-deg. を示せばよい.

(N, y) を (A, I) の $(s_1, \dots, s_r)\underline{a}$-modif で deg. とする.

$\forall e \geq 1$, $(\mathcal{F}^e(N), \mathcal{F}^e(y))$ は (A, I) の $\underline{a}^{pe}$-modif.

いま $\exists c \in A$: non-nilpotent; $\forall e$,

$$\begin{tikzcd}
(A, 1) \arrow[r] \arrow[dr] & (\mathcal{F}^e(N), \mathcal{F}^e(y)) \arrow[d, "\exists \varphi_r"] \\
& (A, c^r)
\end{tikzcd}$$

($(A, \mathfrak{m})$ が hom image of Gor なら OK. ここでは complete を使った)

すると $\forall e$. $c^r = \varphi_r(\mathcal{F}^e(y)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{deg なので}}}{\subset} \varphi_r(\underline{a}^{pe} \mathcal{F}^e(N)) \subset \underline{a}^{pe} A$

よって $c^r \in \bigcap_{e \geq 1} \underline{a}^{pe} A = 0$. ↯

equi. char $p=0$ のとき.

Def

$\mathbb{Z}[X,Y] := \mathbb{Z}[X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_m]$

$E \subset \mathbb{Z}[X,Y]$: finite を system of equations という

$\exists A$: ring, $\exists\, \underline{a} = a_1,\dots,a_n$, $\underline{b} = b_1,\dots,b_m \in A$;

$\forall f \in E$, $f(\underline{a},\underline{b}) = 0$ のとき. E は A で解を持つという.

$\mathrm{ht}\,\underline{a} = n$ のとき この解は ht n という.

thm (Hochster's metatheorem)

A : Noe loc. equi. char. E : sys. of equ.

E has a solution in A of ht n.

$\Rightarrow \exists A'$: Noe. loc. equi. char $p>0$;

E has a solution $\underline{a}'$, $\underline{b}'$ in A' with $\underline{a}'$: s.o.p of A'.

(A' を $\mathbb{F}_p$-f.g. domain を maximal ideal で localise したものにできる.

A : regular なら A' も regular. $\underline{a}'$ も regular s.o.p にできる.

証明には Artin's approximation thm と
「henselisation = $\varinjlim$ etale alg」特に
$$A^h = \varinjlim (A[x]/f)_{x,m} \quad (f: \text{monic}, a_1 \notin m, a_0 \in m)$$
と書けることを使う.

Prop 6

$1 \le n$, $0 \le s_1, \dots, s_r \le n-1$ に対して
$\exists m \ge 1$; $\exists E \subset \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m]$: sys of equ,
$\forall A$: ring, $\forall \underline{a} = a_1, \dots, a_n \in A$,
「$\exists (M, x)$: $(s_1, \dots, s_r)$-$\underline{a}$-modif. of $(A, 1)$ degenerate
$\iff \exists b_1, \dots, b_m \in A$: $\underline{a}, \underline{b}$ is solution of E」

thm

equi. char $p=0$ で big CM が成り立つ.

Proof

$\underline{a}$: s.o.p. $\forall M \in \mathrm{Mod}\,A$ $\underline{a}$: not M-regular とする.
Prop 5 より $\exists (N, y)$: $(s_1, \dots, s_r)$-$\underline{a}$-modif. of $(A, 1)$ degenerate.
この $s_1, \dots, s_r$ に対し Prop 6 より $\exists E$; E has a solution in A.
Metathm より $\exists A'$: Noe. loc. equi. char $p>0$, E has a solution in A'.
Prop 6 より degenerate する $\underline{a}$-modif がある. Prop 5 と矛 //