

Generalizations of Regular Sequences and Grade, and Problems Related to Applications

Ryoya Ando

東京理科大学創域理工学研究科数理科学専攻
株式会社スキルアップ NeXt

第 22 回数学総合若手研究集会

March 8, 2026

- ① Introduction
- ② 局所コホモロジーと弱副正則列
- ③ Cohen–Macaulay 環と正則列の一般化
- ④ Polynomial Grade
- ⑤ Hamilton–Marley の主張の反例
- ⑥ Reference

① Introduction

② 局所コホモロジーと弱副正則列

③ Cohen–Macaulay 環と正則列の一般化

④ Polynomial Grade

⑤ Hamilton–Marley の主張の反例

⑥ Reference

- 本講演を通して、環といえば 1 を持つ可換環のこととする。Noether 性は特に断らない限り課さない。
- 可換環は加法と乗法を備えた集合であり、整数全体 \mathbb{Z} の一般化である。
- イデアルは素因数分解における因子の一般化として導入された概念であり、可換環の重要なクラスの特徴づけを与える。
- 加群は体上の線型空間の拡張として考えることができ、加群とその全体のなす圏の観察も重要である。その際にホモロジー代数が用いられる。

Noether 環においては、イデアル論的な不変量とホモロジー的な不変量の一致により特徴づけられる環はよく研究されている。

正則局所環	$\dim A = \text{gl.dim } A$
Cohen–Macaulay 局所環	$\dim A = \text{depth } A$
Gorenstein 局所環	$\dim A = \text{inj.dim } A$

まずは, Cohen–Macaulay 環のイデアル論的な特徴づけを復習しておく.

Definition 1.1

A を環, M を A 加群とする. $a \in A$ が任意の $0 \neq x \in M$ に対して $ax \neq 0$ であるとき, a を M の正則元という.

$a_1, \dots, a_r \in A$ について, 任意の i に対し a_i が $M/(a_1, \dots, a_{i-1})M$ 正則でありかつ $M/(a_1, \dots, a_r) \neq 0$ であるとき, \underline{a} を M の正則列 (regular sequence) という.

Remark 1.2

- 体 k 上の多項式 $A = k[X_1, X_2, X_3]$ を考える. $f_1 = X_1, f_2 = X_2(1 - X_1), f_3 = X_3(1 - X_1)$ とすると, f_1, f_2, f_3 は A 正則列.
- しかし, f_2, f_3, f_1 は A 正則列ではない. なぜなら, A/f_2A において $X_2 \neq 0$ だが, $f_3X_2 = X_3X_2(1 - X_1) = 0 \in A/f_2A$ であるから.
- このように正則列は並べ替えによるが, Noether 局所環 (A, \mathfrak{m}) 上の有限生成加群 M については, $\underline{a} \subset \mathfrak{m}$ が M 正則列ならば, 並べ替えによらない.

Definition 1.3

A を Noether 環, M を有限生成 A 加群, I を $IM \neq M$ であるような A のイデアルとする. このとき, I の元からなる極大な M 正則列の長さは一定であり, それを $\text{depth}_I(M)$ で表す. A が局所環で $I = \mathfrak{m}$ のとき, 単に $\text{depth}(M)$ と書く.

Definition 1.4

(A, \mathfrak{m}) を Noether 局所環, M を有限生成 A 加群とする. $\dim M = \text{depth } M$ であるとき, M を Cohen–Macaulay (CM) であるという. A 自身が CM であるとき, A を CM 局所環という.

また, CM 環の特徴として, 任意の巴系 (system of parameters) が正則列となることも同値である.

Definition 1.5

(A, \mathfrak{m}) を $d = \dim A$ であるような Noether 局所環とする. $a_1, \dots, a_d \in \mathfrak{m}$ が \mathfrak{m} 準素イデアルを生成するとき, a_1, \dots, a_d を A の巴系という.

先ほどの環のクラスは巴系によって特徴つけることもできる.

正則局所環

ある巴系が極大イデアルを生成する

Cohen–Macaulay 局所環

任意の巴系が正則列

Gorenstein 局所環

CM 環でありかつ, 任意の巴系で生成されるイデアルは既約

ここで, depth は, ホモロジー代数的に特徴づけることもできる.

Proposition 1.6

A を Noether 環, M を有限生成 A 加群, I を $IM \neq M$ であるような A のイデアルとする.
このとき次の等式が成り立つ.

$$\text{depth}_I(M) = \inf \{i \in \mathbb{N} \mid \text{Ext}^i(A/I, M) \neq 0\}.$$

よって, CM 環とは Krull 次元が Ext の消滅によって測ることのできる環, と考えることができる.

- このように、環のイデアルとホモロジー的性質の関係を調べることは、可換環論における主要な流れの1つであった。
- 1960年代からホモロジカル予想と呼ばれる一連の予想が提唱された。
- Hochsterによりこれを包括する **big Cohen–Macaulay (CM) 予想**が提唱された。

Theorem 1.7 (Big CM 予想 ; André, 2018)

(A, \mathfrak{m}) を Noether 局所環とする。次の条件を満たす A 代数 B が存在する：

- $B \neq \mathfrak{m}B$,
- A の巴系は B 上で正則列をなす。

このような B を A の **big CM 代数**と呼ぶ。

この big CM 代数は、 A 自身が CM 環でない場合に、 A をうまく近似するような代数であって、CM 性に近い性質を持ったもの、と考えることができる。

標数の分類

(A, m, k) 局所環とすると, A の標数 $\text{char } A$ は 4 種類に分類される.

	$\text{char } A$	$\text{char } k$
等標数 0	0	0
等標数 p	p	p
混標数 $(0, p)$	0	p
混標数 $(p^n, p), (n > 1)$	p^n	p

- 等標数の場合はホモロジカル予想は解決されており, フロベニウス写像 $F : A \rightarrow A; a \mapsto a^p$ が重要な手法となる.
- F が全単射のとき A は完全 (perfect) であるという.
- この概念を混標数へ拡張したものが パーフェクトイド (perfectoid) である.
- André (2018a,b) はパーフェクトイド代数を駆使して big CM 予想を解決した.

また，等標数の場合に強力であった Kunz の定理は，パーフェクトイドの手法を用いることで混標数へ拡張することができる．

Theorem 1.8 (Kunz (1976))

A : $\text{char } A = p > 0$ であるような Noether 環．

- ① A は正則である．
- ② $F : A \rightarrow A; a \mapsto a^p$ は平坦である．

Theorem 1.9 (Bhatt et al. (2019), Theorem 4.7)

A : $p \in \text{rad } A$ であるような Noether 環．

- ① A は正則である．
- ② 忠実平坦 A 代数 $A \rightarrow B$ で B がパーフェクトイドとなるものが存在する．

このように、パーフェクトイド環は Noether 環を調べる上でも非常に強力な道具となるが、そのような環は非 Noether 環になってしまう。

Example 1.10

p 進整数環 \mathbb{Z}_p に、 p の p べき根をすべて付け加え、 p 進完備化した環 $\widehat{\mathbb{Z}_p[p^{1/p^\infty}]}$ が、パーフェクトイド環の典型例である。

したがって、Noether 環論の研究においても、非 Noether 環に適用可能な理論の展開が必要となる。

① Introduction

② 局所コホモロジーと弱副正則列

③ Cohen–Macaulay 環と正則列の一般化

④ Polynomial Grade

⑤ Hamilton–Marley の主張の反例

⑥ Reference

Definition 2.1

A : 環, I : A のイデアル.

$H_I^i(-) := \varinjlim \text{Hom}_A(A/I^n, -)$ の右導来関手を局所コホモロジー (local cohomology) と呼ぶ.

帰納極限をとる操作は完全関手であるため, 以下の同型が成り立つ:

$$H_I^i(M) \cong \varinjlim \text{Ext}^i(A/I^n, M).$$

Definition 2.2 (Čech 複体)

$\underline{a} = a_1, \dots, a_r \in A$, $\{e_i\}: A^r$ の標準基底. 各 $I = \{j_1 < \dots < j_i\}$ に対し $a_I = a_{j_1} \cdots a_{j_i}$, $e_I = e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_i}$ とおく.

$$C^i(\underline{a}) := \sum_{\#I=i} A_{a_I} e_I, \quad d^i : C^i \rightarrow C^{i+1}; e_I \mapsto \sum_{j=1}^r e_I \wedge e_j.$$

$\check{H}^i(\underline{a}, M) := H^i(C^\bullet(\underline{a}) \otimes M)$ を Čech コホモロジーと呼ぶ.

Noether 環においては，次の定理により局所コホモロジーを Čech コホモロジーで計算可能である．

Theorem 2.3

A : Noether 環， $\underline{a} = a_1, \dots, a_r \in A$ ， $I = (a_1, \dots, a_r)$ ．

任意の $M \in \text{Mod}(A)$ に対し， $H_I^i(M) \cong \check{H}^i(\underline{a}, M)$ ．

~~~~~> Noether 性の仮定を外すとどうなるか？

Schenzel (2003) は 弱副正則列 (**weakly proregular sequence**) を導入することで，この定理を拡張した．

弱副正則列は Koszul ホモロジーを用いて定義される。

### Definition 2.4 (Schenzel (2003))

$A$ : 環,  $\underline{a} = a_1, \dots, a_r \in A$ .

すべての  $1 \leq i \leq r$ ,  $n \geq 0$  に対してある  $m \geq n$  が存在し,  $\varphi_{mn} : H_i(\underline{a}^m) \rightarrow H_i(\underline{a}^n)$  が零写像となるとき,  $\underline{a}$  を弱副正則列という。

Greenlees and May (1992) は副正則列を定義しており, Schenzel はそれを踏まえて弱副正則列を定義した。正則列  $\implies$  副正則列  $\implies$  弱副正則列 が成り立っている。

### Definition 2.5 (Greenlees and May (1992))

$((a_1^m, \dots, a_{i-1}^m) : a_i^m A) \subset ((a_1^n, \dots, a_{i-1}^n) : a_i^{m-n} A)$  が成り立つとき,  $a_1, \dots, a_r$  を副正則列 (proregular sequence) という。

## Theorem 2.6 (Schenzel (2003))

$A$ : 環,  $\underline{a} = a_1, \dots, a_r \in A$ ,  $I = (a_1, \dots, a_r)$ .

$$\underline{a} \text{ が弱副正則列} \iff \forall i \geq 0, \forall M \in \text{Mod}(A), H_I^i(M) \cong \check{H}^i(\underline{a}, M).$$

$A$  が Noether 環ならば任意の列  $\underline{a}$  は弱副正則列となるので, Schenzel の定理は Noether 版の拡張になっている.

- Schenzel は導来圏の理論を用いて上の定理を証明した.
- Ando (2022) では, Abel 圏の枠組みに収まるより単純な証明を与えた.
- 鍵となるのは次の命題を Abel 圏論のみを用いて証明することである.

## Proposition 2.7 (A.)

$\underline{a}$  が弱副正則列  $\iff i > 0$  について  $\check{H}^i(\underline{a}, -)$  が *effaceable functor*.

弱副正則列は正則性の特徴づけに応用されていることを紹介しておく。

### Theorem 2.8 (Bhatt et al. (2019), Theorem 4.13)

$(A, \mathfrak{m}, k)$ : 局所優秀整域. 以下のいずれかを満たせば  $A$  は正則:

- ①  $A$  は正標数で, ある  $i \geq 1$  に対し  $\mathrm{Tor}_i^A(A_{\mathrm{perf}}, k) = 0$ .
- ②  $A$  は正標数で, ある  $i \geq 1$  に対し  $\mathrm{Tor}_i^A(A^+, k) = 0$ .
- ③  $A$  は混標数,  $\dim A \leq 3$ , ある  $i \geq 1$  に対し  $\mathrm{Tor}_i^A(A^+, k) = 0$ .

証明の概略:  $\underline{a}$  を  $A$  の巴系とすると, 各条件のもとで  $A_{\mathrm{perf}}$  および  $A^+$  上で弱副正則となることを示し, 十分大きい  $i$  について  $\mathrm{Tor}_i(k, k) = 0$  を導く.

- 1 Introduction
- 2 局所コホモロジーと弱副正則列
- 3 Cohen–Macaulay 環と正則列の一般化**
- 4 Polynomial Grade
- 5 Hamilton–Marley の主張の反例
- 6 Reference

正則列の一般化について，弱副正則列とはやや異なる方向性もあり，CM 性の観点から考えてみる．

### Recall 3.1

$(A, \mathfrak{m})$  を Noether 局所環とする．このとき， $\mathfrak{m}$  の元からなる極大な  $M$  正則列の長さ  $\text{depth } A$  が Krull 次元  $\dim A$  と等しいとき， $A$  を CM 局所環という．

この性質を非 Noether 環に単純に一般化するとうまくいかない．

付値環  $V$  を考えると：

- 任意の (体でない) 付値環  $V$  に対して  $\text{depth } V = 1$ .
- 非 Noether 付値環  $V$  に対して  $\text{dim } V \geq 2$ .

一方、すべての付値環は 接続正則環 (coherent regular ring) であり、Noether な接続正則環は Cohen–Macaulay である。

よって (Noether とは限らない) 付値環も CM と考えるのが自然であり、 $\text{dim } A = \text{depth } A$  による一般化は不適切。

望ましい一般化の条件：

- ① Noether 環の場合、古典的な定義と一致する。
- ② 接続正則環は Cohen–Macaulay となる。
- ③  $A$  が CM  $\iff A[X]$  が CM.
- ④  $A$  が CM  $\iff$  すべての  $P \in \text{Spec } A$  で  $A_P$  が CM.

- big CM 予想や, Bhatt et al. (2019) の結果 (Theorem 1.9) においても, 巴系が正則であるかどうかに関心が当てられていた.
- Hamilton and Marley (2007) は弱副正則列を用いて巴系を一般化することで, 条件 1, 2 を満たし条件 3, 4 の「if」部分を満たす定義を提案した (「only if」については未解決である).

### Definition 3.2 (Hamilton and Marley (2007), Definition 3.1, 4.1)

$A$ : 環, 点列  $\underline{a} = a_1, \dots, a_r \in A$  がパラメータ列 (parameter sequence) であるとは:

- ①  $\underline{a}$  は弱副正則列,
- ②  $\underline{a}A \neq A$ ,
- ③  $\underline{a}$  を含むすべての素イデアル  $P$  に対し  $\check{H}^r(\underline{a}, A)_P \neq 0$ .

各  $i = 1, \dots, r$  に対し  $a_1, \dots, a_i$  がパラメータ列のとき強パラメータ列という.

すべての強パラメータ列が正則列となるとき,  $A$  は **Cohen–Macaulay** であるという.

- $A$  が Noether ならばパラメータ列と巴系は一致し，Hamilton–Marley の定義は古典的定義の一般化になっている．
- （一般には）非 Noether だが，CM となる環のクラスの例として，例えば標数  $p > 0$  の優秀整域  $A$  に対する絶対整閉包  $A^+$  などがあげられる．
- 彼らの議論では，Hochster (1974) により導入された，古典的な grade の拡張である polynomial grade が用いられている．

- 1 Introduction
- 2 局所コホモロジーと弱副正則列
- 3 Cohen–Macaulay 環と正則列の一般化
- 4 Polynomial Grade**
- 5 Hamilton–Marley の主張の反例
- 6 Reference

### Definition 4.1 (Hochster (1974))

$\underline{a} = a_1, \dots, a_r \in A$ .  $a_i$  が  $M/(a_1, \dots, a_{i-1})M$  の正則元であるとき,  $\underline{a}$  を **weak  $M$ -sequence** という.

この呼び方は Bruns and Herzog (1997) に倣った. Hochster (1974) は possibly improper regular sequence on  $M$  と呼んでいる.

- $\text{grade}_I(M)$  を  $I$  内の weak  $M$ -sequence の最長の長さで定義する.
- $\text{depth}_I(M)$  を  $I$  内の regular  $M$ -sequence の最長の長さで定義する.

### Lemma 4.2

$A$ : Noether 環,  $I$ : イデアル,  $M$ : 有限生成  $A$  加群.

$$\text{grade}_I(M) > 0 \iff (0 :_M I) = 0.$$

Noether 性を外すと  $(0 :_M I) = 0$  だが  $\text{grade} = 0$  となることがある.

### Definition 4.3

$A$  を環とし,  $M$  を  $A$  加群とする. 直和  $A \oplus M$  に次の演算を定めると環になる ;

$$(a, x) + (b, y) = (a + b, x + y),$$

$$(a, x)(b, y) = (ab, ay + bx).$$

これを  $A * M$  とかき,  $A$  の  $M$  による trivial extension またはイデアル化 (idealization) という.

$(a, x) \in A * M$  が  $A * M$  正則であることは,  $a$  が  $A$  正則かつ  $M$  正則であることと同値である.

### Example 4.4 (Vasconcelos (1971))

$k$  を体とし,  $A = k[[x, y]]$ ,  $\mathfrak{m} = (X, Y)$ ,  $M = \bigoplus_{P \in \text{Spec } A, \text{ht } P=1} A/P$  とする. このとき  $A * M$  において,  $(0 :_{A * M} \mathfrak{m} * M) = 0$  だが  $\text{grade}_{\mathfrak{m} * M} A * M = 0$  である.

### Lemma 4.5 (Northcott (1976), Chap. 5, Thm. 7)

$A$ : 環,  $M$ :  $A$  加群,  $I = (a_1, \dots, a_r)$ : 有限生成イデアル.

$$\text{grade}_{IA[X]}(M \otimes_A A[X]) > 0 \iff (0 :_M I) = 0.$$

### Definition 4.6 (Northcott (1976), Chap. 5.5)

$$\text{p-grade}_I M := \lim_{n \rightarrow \infty} \text{grade}_{IA[X_1, \dots, X_n]}(M[X_1, \dots, X_n]).$$

これを  $M$  の  $I$  に関する **polynomial grade** という.

- 一般に次が成り立つ:

$$\text{p-grade}_I M \leq \sup \{ \text{grade}_{IB}(M \otimes_A B) \mid B : \text{忠実平坦 } A \text{ 代数} \}.$$

- Hamilton and Marley (2007) には「等号が成り立つ」と証明なしで言及されている.

Hochster (1974) は、 $(I, M)$  が許容的であるとき、右辺を classical ではない grade の定義としている。

#### Definition 4.7 (Hochster (1974))

任意の忠実平坦  $A$  代数  $B$  に対して、 $IB$  に含まれる任意の weak  $M \otimes B$ -sequence が  $M \otimes B$ -正則列となるとき、 $(I, M)$  は許容的 (admissible) という。

$IM \neq M$  であるならば、 $(I, M)$  は許容的である。また  $M$  が有限生成ならば、 $IM \neq M$  と  $(I, M)$  であることは同値である。つまり、 $M$  が有限生成ならば  $IM = M$  であるとき  $(I, M)$  は許容的ではない。

#### Proposition 4.8 (Hochster (1974), Sect. 1, Prop. 2)

$(I, M)$  が許容的ならば、ある  $n \geq 0$  が存在して忠実平坦  $B$  に対し  $\text{grade}_{IB}(M \otimes_A B) \leq \text{grade}_{IA[X_1, \dots, X_n]}(M[X_1, \dots, X_n])$ 。

よって、 $IM \neq M$  のとき  $\lim \text{grade}(M[X_1, \dots, X_n]) = \sup\{\text{grade}(M \otimes B)\}$  であることはわかった。

$IM = M$  の場合を考える． $M$  が有限生成ならば，中山の補題により左辺が  $\infty$  となり，等号の成立がわかる．

### Proposition 4.9

$A$  を環， $I$  をそのイデアル， $M$  を有限生成  $A$  加群とし， $IM = M$  とする．このとき  $\text{grade}_I M = \infty$  である．特に  $\lim \text{grade}_I(M[X_1, \dots, X_n]) = \infty$  となり所望の等号は成り立つ．

### Proof.

$IM = M$  なので，中山の補題より  $a \in A$  であって  $(a+1) \in I$  かつ  $aM = 0$  となるものがとれる．すると  $a+1$  は  $M$  正則であって， $M/(a+1)M = 0$  なので  $a+1, a+1, \dots$  のように取り続けることができる．すなわち  $\text{grade}_I(M) = \infty$  である． □

つまり  $IM = M$  かつ  $M$  が有限生成でないときが問題である.

### Example 4.10 (A.)

$A = \mathbb{Z}, I = 2\mathbb{Z}, M = \{a/2^n + \mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z}, n \geq 0\} \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  とすると,  $IM = M$  かつ  $I$  の任意の元は  $M$  正則ではありえない, すなわち  $\text{grade}_I M = 0$  である.

よって,  $IM = M$  のとき  $\text{grade}_I(M) = \infty$  となるとは限らない.

この例では,  $I$  が単項生成なので, 任意の忠実平坦な  $A$  代数  $B$  について  $\text{grade}_{IB}(M \otimes B) = 0$  である (結果的に両辺 0 で等号は成り立つ).

$\text{grade}_I M = 0$  だからといって,  $p$ -grade が 0 とは限らない.

特に Vasconcelos の例では, Lemma 4.5 により  $p$ -grade が正になる (この例では  $IM \neq M$  はあるが).

また  $(I, M)$  が許容的でないならば、次が言えている。

### Lemma 4.11

$A$  を環とし、 $I$  をそのイデアル、 $M$  を  $A$  加群とする。 $(I, M)$  が許容的でないならば、

$$\sup \{ \text{grade}_{IB}(M \otimes_A B) \mid B : \text{faithfully flat } A\text{-algebra} \} = \infty$$

である。

### Proof.

ある忠実平坦  $A$  代数  $B$  と、 $IB$  の点列で weakly  $M \otimes B$ -sequence だが regular  $M \otimes B$ -sequence でない列  $\underline{b}$  が存在する。つまり、 $\underline{b}, b_0, b_0, \dots$  が長さ無限の weakly  $M \otimes B$ -sequence となる。 □

## Proposition 4.12 (A.)

$A$  を環とし,  $I$  をそのイデアル,  $M$  を  $A$  加群とする.  $(I, M)$  を許容的でないとする. このとき,  $\lim \text{grade}(M[X_1, \dots, X_n]) = \infty$  である.

### Proof.

$(I, M)$  が許容的ではないとき, 任意の  $i$  に対して Koszul ホモロジーが消えているようなある  $\underline{a} = a_1, \dots, a_r \subset I$  が存在する.

$H_r(\underline{a}, M) = \ker d_r = \{x \in M \mid a_i x = 0 \text{ for all } i\}$  であり, いま構成的にすべての Koszul ホモロジーが消えているから  $u_1 := \sum_{i=1}^r a_i X_1^i$  は  $M[X_1]$  の正則元である.

各  $i$  に対して  $H_i^{A[X_1]}(\underline{a}, M[X_1]) = H_i^A(\underline{a}, M) \otimes A[X_1] = 0$  であり, また短完全列

$$0 \longrightarrow M[X_1] \xrightarrow{u_1} M[X_1] \longrightarrow M[X_1]/u_1 M[X_1] \longrightarrow 0$$
 から誘導される Koszul

homology の長完全列を考えることで,  $H_i^{A[X_1]}(\underline{a}, M[X_1]/u_1 M[X_1]) = 0$  となる.

よって  $u_2 := \sum_{i=1}^r a_i X_2^i$  とおくと, これは同様に  $M[X_1]/u_1 M[X_1]$  上の正則元となり,

$H_i^{A[X_1, X_2]}(\underline{a}, M[X_1, X_2]/u_1 M[X_1, X_2]) = 0$  となる.

よって, 繰り返すことによって  $\lim \text{grade}(M[X_1, \dots, X_n]) = \infty$  であることがわかる. □

## Theorem 4.13 (A.)

$A$  を環とし,  $I$  をそのイデアル,  $M$  を  $A$  加群とする.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{grade}_{IA[X_1, \dots, X_n]} M[X_1, \dots, X_n] = \sup \{ \text{grade}_{IB}(M \otimes_A B) \mid B : \text{faithfully flat } A\text{-algebra} \}$$

である.

Hamilton and Marley (2007) には証明なしで記載されており, well-known for experts かと思うが, 証明はある程度非自明である.

## Proof.

$(I, M)$  が許容的であるならば, Proposition 4.8 により, 等号が成り立っている. 許容的でないときは Proposition 4.12 により, 等号が成り立つ.  $\square$

- 1 Introduction
- 2 局所コホモロジーと弱副正則列
- 3 Cohen–Macaulay 環と正則列の一般化
- 4 Polynomial Grade
- 5 Hamilton–Marley の主張の反例**
- 6 Reference

Hamilton and Marley (2007), Prop. 2.7 では次が主張されている：  
 $A$  を環， $I = (a_1, \dots, a_r)$  を有限生成イデアル， $M$  を  $A$  加群とする．

$$\begin{aligned} \text{p-grade}_I(M) &= \sup\{k \geq 0 \mid H_{\ell-i}(\underline{a}, M) = 0 \text{ for all } i < k\} \\ &= \sup\{k \geq 0 \mid \check{H}_I^i(M) = 0 \text{ for all } i < k\}. \end{aligned}$$

さらに，「 $\text{p-grade}_I(M) < \infty \iff IM \neq M$ 」と主張している．

### 反例 (A.)

$A = \mathbb{Z}$ ,  $I = 2\mathbb{Z}$ ,  $M = \{a/2^n + \mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z}, n \geq 0\} \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  とおくと， $IM = M$  だが  $I$  の任意の元は  $M$  正則でない．

よって  $\text{grade}_I M = 0$  (かつ  $\text{p-grade}_I M = 0$ ) ．

一方， $IM = M$  であるにも関わらず  $\text{p-grade}_I(M) = 0 < \infty$  ．

- 上の例では  $p\text{-grade}_I M = 0$  であり, Koszul ホモロジーおよび Čech コホモロジーを計算すると (2), (3) の不変量は一致している.
- 証明を読む限り, これらの不変量が一致することは正しい.
- しかし, 証明なしに言及されている「Moreover」の部分 ( $p\text{-grade} < \infty \iff IM \neq M$ ) は誤りである.

$IM = M$  かつ  $M$  が有限生成のときは, 中山の補題より  $\text{grade}_I M = \infty$  となる.

$IM = M$  かつ  $M$  が非有限生成の場合が問題であり, 上の例がその反例を与える.

- [And22] R. Ando (2022) “A note on weakly proregular sequences”, *Moroc. J. Algebra Geom. Appl.*, Vol. 1, No. 1, pp. 98–107.
- [And18] Y. André (2018a) “La conjecture du facteur direct”, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, Vol. 127, No. 1, pp. 71–93, DOI: 10.1007/s10240-017-0097-9.
- [And18] Y. André (2018b) “Le lemme d’ Abhyankar perfectoïde”, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, Vol. 127, No. 1, pp. 1–70, DOI: 10.1007/s10240-017-0096-x.
- [BIM19] B. Bhatt, S. B. Iyengar, and L. Ma (2019) “Regular rings and perfect(oid) algebras”, *Comm. Alg.*, Vol. 47, No. 6, pp. 2367–2383, DOI: 10.1080/00927872.2018.1524009.
- [BH97] W. Bruns and J. Herzog (1997) *Cohen–Macaulay Rings*, Vol. 39 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics : Camb. Univ. Press, revised edition.
- [Gla89] S. Glaz (1989) *Commutative Coherent Rings*, Vol. 1371 of Lecture Notes in Mathematics : Springer–Verlag.
- [GM92] J. P. C. Greenlees and J. P. May (1992) “Derived functors of  $l$ -adic completion and local homology”, *J. Algebra*, Vol. 149, No. 2, pp. 438–453, DOI: 10.1016/0021-8693(92)90026-I.
- [HM07] T. D. Hamilton and T. Marley (2007) “Non-Noetherian Cohen–Macaulay rings”, *J. Algebra*, Vol. 307, No. 1, pp. 343–360, DOI: 10.1016/j.jalgebra.2006.08.003.
- [Hoc74] M. Hochster (1974) “Grade-Sensitive Modules and Perfect Modules”, *Proc. London. Math. Soc.*, Vol. s3-29, pp. 55–76, DOI: 10.1112/plms/s3-29.1.55.
- [Kun76] E. Kunz (1976) “On Noetherian Rings of Characteristic  $p$ ”, *Amer. J. Math.*, Vol. 98, No. 4, pp. 999–1013, DOI: 10.2307/2374038.
- [Nor76] D. G. Northcott (1976) *Finite free resolutions*, Vol. 71 of Cambridge tracts in mathematics : Camb. Univ. Press.
- [Sch03] P. Schenzel (2003) “Proregular sequences, local cohomology, and completion”, *Math. Scand.*, Vol. 92, No. 2, pp. 161–180, DOI: 10.7146/math.scand.a-14399.
- [Vas71] W. V. Vasconcelos (1971) “Annihilators of modules with a finite free resolution”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 29, pp. 440–442, DOI: 10.2307/2038576.