

A Counterexample to Polynomial Stability of Hamilton – Marley Cohen – Macaulay Rings

Ryoya Ando

SKILLUP NeXt Ltd.

2026-07-14

① Introduction

② Hamilton–Marley の定義

③ 多項式環への拡大

④ 局所化

⑤ Reference

① Introduction

② Hamilton–Marley の定義

③ 多項式環への拡大

④ 局所化

⑤ Reference

本講演を通して、環といえば 1 を持つ可換環のこととする．Noether 性は特に断らない限り課さない．

Noether 環において Cohen–Macaulay 性は非常によく振る舞う．例えば：

- A が Cohen–Macaulay ならば $A[X]$ も Cohen–Macaulay．
- Cohen–Macaulay 性は局所化で保たれる．

本講演の主題は，Noether とは限らない条件化における Cohen–Macaulay 性において，これらの安定性がどこまで保たれるかである．内容は [arXiv:2606.25384](https://arxiv.org/abs/2606.25384) [And26] に基づく．

non-Noetherian 環で Cohen–Macaulay 性を考える動機は、例えば以下にある。

- big Cohen–Macaulay 代数やパーフェクトイド代数論では、non-Noetherian 環が自然に現れる。
- 例えば絶対整閉包 A^+ は、 $\dim A \geq 1$ なら一般に Noether ではない。
- よって、Noether 環論の研究においても、non-Noetherian 環へ適用可能な理論が必要になる。

Noether 環における CM 環の定義は、以下の同値な条件を満たす環のことであった。

- ① $\dim A = \text{depth } A$. ここで $\text{depth } A$ は A の極大イデアルに含まれる正則列の最大の長さ。
- ② すべての巴系は正則列である。
- ③ すべての真のイデアル I に対して $\text{ht } I = \text{grade } I$ である。

しかし、単純に $\dim = \text{depth}$ の定義を non-Noetherian 環へ一般化することはうまくいかない。

付値環 V を考えると：

- 任意の体でない付値環 V について $\text{depth } V = 1$ 。
- 一方で、 $\dim V \geq 2$ となる付置環も存在し、特にすべて non-Noetherian である。
- しかし、すべての付値環は 接続正則環 (coherent regular ring) である。

したがって、接続正則環は CM であってほしいので、 $\dim = \text{depth}$ による一般化は不適切である。

non-Noetherian Cohen–Macaulay 環には、少なくとも次を期待したい：

- ① Noether 環の場合、古典的な定義と一致する．
- ② 連接正則環は Cohen–Macaulay となる．
- ③ A が Cohen–Macaulay $\iff A[X]$ が Cohen–Macaulay．
- ④ A が Cohen–Macaulay $\iff$ すべての $P \in \operatorname{Spec} A$ で A_P が Cohen–Macaulay．

[HM07] は、弱副正則列を用いて巴系を一般化することで、条件 1, 2 と、条件 3, 4 の一方方向を満たす定義を提案した．

① Introduction

② Hamilton–Marley の定義

③ 多項式環への拡大

④ 局所化

⑤ Reference

弱副正則列は Koszul ホモロジーを用いて定義される.

Definition 1

A : 環, $\underline{a} = a_1, \dots, a_r \in A$.

すべての $1 \leq i \leq r$, $n \geq 0$ に対してある $m \geq n$ が存在し, 自然な写像

$$\varphi_{mn} : H_i(\underline{a}^m) \longrightarrow H_i(\underline{a}^n)$$

が零写像となるとき, $\underline{a}$ を弱副正則列 (weakly proregular sequence) という. 特に $r = 1$ のとき, a が weakly proregular であることは任意の $n \geq 1$ に対して, ある $m \geq n$ が存在して $a^{m-n} \text{Ann}(a^m) = 0$ であることと同値である.

~~~~~> non-Noetherian 環で局所コホモロジーを Čech コホモロジーにより計算するための条件である.

## Theorem 2 ([Sch03])

$A$ : 環,  $\underline{a} = a_1, \dots, a_r \in A$ ,  $I = (a_1, \dots, a_r)$ .

$$\underline{a} \text{ が弱副正則列} \iff \forall i \geq 0, \forall M \in \text{Mod}(A), H_I^i(M) \cong \check{H}^i(\underline{a}, M).$$

$A$  が Noether 環ならば任意の列  $\underline{a}$  は弱副正則列となるので, 上の定理は Noether 版の拡張になっている.

Hamilton–Marley の定義では, この弱副正則列を用いて巴系を一般化する.

### Definition 3 ([HM07])

$A$ : 環, 点列  $\underline{a} = a_1, \dots, a_r \in A$  がパラメータ列 (parameter sequence) であるとは, 次の条件を満たすことをいう:

- ①  $\underline{a}$  は弱副正則列,
- ②  $\underline{a}A \neq A$ ,
- ③  $\underline{a}$  を含むすべての素イデアル  $P$  に対し  $\check{H}^r(\underline{a}, A)_P \neq 0$ .

各  $i = 1, \dots, r$  に対し  $a_1, \dots, a_i$  がパラメータ列であるとき,  $\underline{a}$  を強パラメータ列という.

## Definition 4 ([HM07])

すべての強パラメータ列が正則列となるとき、 $A$  は Hamilton–Marley の意味で Cohen–Macaulay であるという。

本講演では、この性質を HMCM と略記する。

- ①  $A$  が Noether ならば、パラメータ列と巴系は一致する。
- ② 接続正則環は locally HMCM である。
- ③ Hamilton–Marley の結果により、 $A[X]$  が HMCM ならば  $A$  は HMCM [HM07, Cor. 4.6]。
- ④ すべての極大イデアル  $\mathfrak{m}$  で  $A_{\mathfrak{m}}$  が HMCM ならば  $A$  は HMCM [HM07, Prop. 4.7]。

この条件の 3, 4 は逆も成り立ってほしいが、一般に成り立たない反例を構成したことが今回の結果である。

反例を構築する重要な道具はイデアル化である．

### Definition 5 ([Nag62])

$A$  を環， $M$  を  $A$  加群とする．直和  $A \oplus M$  に

$$(a, x)(b, y) = (ab, ay + bx)$$

により積を定める．これを  $A * M$  と書き， $A$  の  $M$  による **trivial extension** またはイデアル化 (**idealization**) という．

$(a, x) \in A * M$  が  $A * M$  正則であることは， $a$  が  $A$  上かつ  $M$  上で非零因子であることと同値である．

したがって，加群を適切に選ぶことで，「parameter element だが零因子」を作ることができる．また， $(a, x)^n = (a^n, na^{n-1}x)$  であることを注意しておく．

次の命題は [MSS18, Theorem 4.11] の一部を切り出したものであり、これを適用できる例を構築することで HMCM 性が多項式環への拡大、局所化それぞれで保たれない反例を与えることができる。

## Proposition 6

$A$  を環とし、 $M \neq 0$  を  $A$  加群とする．ある  $a \in \text{Reg}(A)$  であって、 $a \notin A^\times$  でありかつ  $aM = 0$  であるものが存在するならば、 $B := A * M$  は HMCM ではない。

## 証明.

$\alpha = (a, 0) \in B$  とおく．この  $\alpha$  が parameter element だが、正則元ではないことを示す．まず、任意の  $x \neq 0 \in M$  に対して  $\alpha(0, x) = 0$  なので、 $\alpha$  は  $B$  の零因子である．さて  $\alpha$  が弱副正則であることは次と同値である．

$$\forall n \geq 1, \exists m \geq n, \quad \alpha^{m-n} \text{Ann}_B(\alpha^m) = 0.$$

ここで任意の  $n$  に対し  $\text{Ann}_B(\alpha^n) = 0 * M$  なので、 $\alpha$  は弱副正則である。 □

## 証明 (続き)

残りは Čech コホモロジーの非消滅を示すことである． $\alpha$  で  $B$  を局所化すると  $(0, x)/1 = \alpha(0, x)/\alpha = 0$  であるから， $B_\alpha \cong A_a$  である．

この同一視のもとで，写像  $B \longrightarrow B_\alpha$  の像は  $A \subset A_a$  である．よって

$$\check{H}^1(\alpha, B) \cong A_a/A.$$

ここで  $\alpha \in \mathfrak{q} = P * M \in \operatorname{Spec} B$  とする．このとき  $a \in P$  である．したがって

$$\check{H}^1(\alpha, B)_{\mathfrak{q}} \cong (A_a)_P/A_P.$$

ここで  $1/a = 0$  なら  $1/a \in A_P$  である．しかしこれは  $a$  が  $A_P$  で単元であることを意味し， $a \in PA_P$  に矛盾する．よって  $(A_a)_P/A_P$  は 0 でない．

以上より  $\alpha$  は parameter element であるが正則元ではなく，したがって  $B$  は HMCM でない．

□

① Introduction

② Hamilton–Marley の定義

③ 多項式環への拡大

④ 局所化

⑤ Reference



Hamilton–Marley の結果により、次は知られている：

$$A[X] \text{ が HMCM} \implies A \text{ が HMCM}.$$

未解決だった方向は、

$$A \text{ が HMCM} \stackrel{?}{\implies} A[X] \text{ が HMCM}$$

である．

この逆向きが成り立たない例を構成する．まずは Prop. 6 を用いて、イデアル化の多項式環への拡大が HMCM ではない一般的な条件を与える．

## Theorem 7 (A.)

$A$  を環,  $I = (a_0, \dots, a_d) \subsetneq A$  を有限生成イデアルとし,  $\text{Ann } I = 0$  とする.  $M = A/I$ ,  $B = A * M$  とおく. このとき  $B[X]$  は *HMCM* でない.

証明の方針は,  $B[X]$  の中に

parameter element であるが正則でない元

を具体的に作ることである.

次の McCoy の定理を用いる.

### Lemma 8

$A$  を環,  $M$  を  $A$  加群とする. 多項式  $f \in A[X]$  が  $A[X]$ -加群  $M[X]$  上の零因子であるための必要十分条件は,  $f = a_0 + \cdots + a_n X^n$  と表示したとき, ある  $x \neq 0 \in M$  が存在して, 任意の  $i$  に対して  $a_i x = 0$  であることである.

### Theorem. 7 の証明.

$f = a_0 + a_1 X + \cdots + a_d X^d \in A[X]$  とおく. 補題と  $\text{Ann } I = 0$  より,  $f \in \text{Reg}(A[X])$  である. また  $a_0 \in I \subsetneq A$  なので  $f$  は単元ではない. また  $f \cdot (A/I)[X] = 0$  である. ここで  $B = A * M$  なので  $B[X] \cong A[X] * M[X]$ . この同型のもとで

$$\alpha = (f, 0) \in A[X] * M[X]$$

とおくと, Prop. 6 により  $B[X] = A[X] * M[X]$  は HMCM ではない.

□

次に、上の命題を適用できる HMCM 環、つまり有限生成イデアル  $I$  で  $\text{Ann } I = 0$  となるようなものを持つ環  $A$  であって、 $A * (A/I)$  が HMCM 環となるものを構成する。

### Example 9 (A.)

$k$  を体とし、

$$D = k[s, t]_{(s, t)}, \mathfrak{m} = (s, t)$$

とおく。さらに

$$M = \bigoplus_{0 \neq g \in \mathfrak{m}} D/gD, A = D * M$$

とする。このとき

$$I = ((s, 0), (t, 0))A = \mathfrak{m} * \mathfrak{m}M, B = A * A/I$$

とおく。このとき  $B$  は parameter element を持たない。特に  $B$  は HMCM である。一方で  $\text{Ann } I = 0$  であり、 $B[X]$  は HMCM ではない。

## 例の証明： $\text{Ann } I = 0$

### 証明.

まず  $\text{Ann}_A I = 0$  を示す.

$(a, u) \in A = D * M$  が  $\text{Ann}_A I$  の元であるとする.  $(s, 0), (t, 0) \in I$  なので

$$(s, 0)(a, u) = 0, (t, 0)(a, u) = 0.$$

第 1 成分から  $sa = ta = 0$ .  $D$  は整域だから  $a = 0$ .

第 2 成分から  $su = tu = 0$ .  $u = (\overline{u_g})_g \in \bigoplus_{0 \neq g \in \mathfrak{m}} D/gD$  と書くと, 各  $g$  で  $su_g, tu_g \in gD$  である.  $D$  は UFD で  $s, t$  は互いに素であるから,  $u_g \in gD$ . よって  $u = 0$ , すなわち  $\text{Ann}_A I = 0$  である. □

## 例の証明：parameter element を持たないこと

### 証明（続き）.

任意の  $\alpha = ((d, u), x) \in B = (D * M) * A/I$  をとる.  $d \in D$  について三つに場合分けする.

#### Case 1: $d \in D^\times$ のとき

$(d, u) \in D * M$  は単元である. 実際, 逆元は  $(d^{-1}, -d^{-2}u)$  である. 同様に  $\alpha$  も  $B$  の単元であり, parameter element ではない.

#### Case 2: $d = 0$ のとき

$a = (0, u)$  とおくと  $a^2 = 0$  であり,  $\alpha^2 = (0, 2ax)$ ,  $\alpha^3 = 0$ . ゆえに  $\alpha$  は冪零元で,  $B_\alpha = 0$ . 従って

$$\check{H}^1(\alpha, B) = \text{Coker}(B \rightarrow B_\alpha) = 0.$$

よって parameter element ではない.

## 例の証明： $0 \neq d \in \mathfrak{m}$ の場合

### 証明（続き）

残る場合は  $0 \neq d \in \mathfrak{m}$  である．一元列について，弱副正則性は

$$\forall n \geq 1, \exists m \geq n, \quad \alpha^{m-n} \text{Ann}_B(\alpha^m) = 0$$

と同値であった．これが  $n = 2$  で失敗することを示す．

$m \geq 2$  に対し， $u_m \in M$  を

$$(u_m)_g = \begin{cases} \bar{1} \in D/d^m D & (g = d^m), \\ 0 & (g \neq d^m) \end{cases}$$

で定め， $\beta_m = ((0, u_m), 0) \in B$  とおく．

$d^m u_m = 0$  なので， $\alpha^m \beta_m$  の第 1 成分は 0 である．また第 2 成分は  $I = \mathfrak{m} * \mathfrak{m} M$  に入るため， $A/I$  で 0 になる．したがって  $\beta_m \in \text{Ann}_B(\alpha^m)$  である． □

# 例の証明：弱副正則性の破れ

## 証明（ここまで）

一方で、 $\alpha^{m-2}\beta_m$  の第 1 成分は  $(0, d^{m-2}u_m)$  である．これが 0 なら、 $D/d^m D$  の成分を見て

$$d^{m-2} \in d^m D$$

となる．しかし  $D$  は整域で  $d$  は単元でないので、これは不可能である．したがって

$$\alpha^{m-2}\beta_m \neq 0.$$

ゆえに各  $m \geq 2$  について

$$\alpha^{m-2} \operatorname{Ann}_B(\alpha^m) \neq 0.$$

したがって  $\alpha$  は弱副正則でない．

すべての場合で  $\alpha$  は parameter element でない．よって  $B$  には非空な強パラメータ列がなく、 $B$  は HMCM である．さらに  $\operatorname{Ann} I = 0$  なので Theorem 7 より  $B[X]$  は HMCM でない．  $\square$



以上により,

$B$  は HMCM だが,  $B[X]$  は HMCM でない.

~~~~~→ HMCM 性は多項式環への拡大で一般には保存されない.

また，多項式拡大で保たれる条件については [KW20] の結果を少しだけ拡張することで次がわかる．

Theorem 10 (A.)

A を安定接続環 (*stably coherent ring*) とし，

$$\text{w. gl. dim } A < \infty$$

とする．このとき任意の $n \geq 0$ について，

$$A[X_1, \dots, X_n]$$

は *locally HMCM* である．特に *HMCM* である．

[KW20] では，有限次元 Prüfer 整域，特に付値環の場合に成り立つことを示しており，その一般化である．

① Introduction

② Hamilton–Marley の定義

③ 多項式環への拡大

④ 局所化

⑤ Reference

Hamilton–Marley の結果により，次は知られている：

$$\bigvee \mathfrak{m} \in \text{Max } A, \quad A_{\mathfrak{m}} \text{ が HMCM} \implies A \text{ が HMCM}.$$

未解決だった方向は，

$$A \text{ が HMCM} \stackrel{?}{\implies} A_P \text{ が HMCM for all } P \in \text{Spec } A$$

である．

本稿の結論は，この逆向きも一般には偽である，というものである．

Prop. 6 を適用するため，大域的には HMCM だが，局所化すると Prop. 6 の形が現れる環を作る．

Example 11

k を無限体とし，

$$D = k[s, t]_{(s, t)}, \mathfrak{m} = (s, t), P = sD$$

とおく．このとき， D 加群 M とイデアル $I \subset A := D * M$ であって， $B = A * (A/I)$ に対して，ある $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$ であって B が HMCM であり，かつ

$$B_{\mathfrak{q}} \cong D_P * (D_P / sD_P)$$

となるものが存在する．このとき $B_{\mathfrak{q}}$ は HMCM ではない．

局所化反例の証明： $N_{d,n}$ の定義

証明.

各 $0 \neq d \in \mathfrak{m}$, $n \geq 2$ に対し, D 加群 $N_{d,n}$ と元 $u_{d,n}$ を

$$d^n u_{d,n} = 0, \quad d^{n-1} u_{d,n} \in sN_{d,n}, \quad d^{n-2} u_{d,n} \neq 0, \quad (N_{d,n})_P = 0$$

を満たすように作る.

この条件の意味は次の通りである.

- $d^n u = 0$ と $d^{n-2} u \neq 0$ で弱副正則性を壊す.
- $d^{n-1} u \in sN_{d,n}$ で $\alpha^n = (a^n, na^{n-1}x)$ の挙動を制御する.
- $(N_{d,n})_P = 0$ で, 局所化後に余計な成分を消す.



局所化反例の証明： $N_{d,n}$ の作り方

証明（続き）

Case 1: $d \notin P$ のとき

$$N_{d,n} = D^2 / (d^n e_1, d^{n-1} e_1 - s e_2, d e_2) D^2, u_{d,n} = \overline{e_1}.$$

とする． $d^n u = 0$ と $d^{n-1} u \in s N_{d,n}$ は関係式から従う．写像 $D^2 \rightarrow D/d^{n-1} D$, $e_1 \mapsto 1, e_2 \mapsto 0$ を考えると，これは $N_{d,n}$ の定義関係式を消すので， $N_{d,n} \rightarrow D/d^{n-1} D$ を誘導する． $d^{n-2} u_{d,n}$ の像は d^{n-2} の剰余類であり， D が整域で d は非単元だからこれは0ではない．よって $d^{n-2} u \neq 0$ が分かる．また $d \notin P$ なので D_P では d が単元となり，関係式から $(N_{d,n})_P = 0$ ．



局所化反例の証明： $N_{d,n}$ の作り方

証明（続き）.

Case 2: $d \in P$ のとき

D が UFD で k が無限体なので, $\lambda \in k$ を $r_{d,n} := t - \lambda s$ が d を割らないように取れる.

$$N_{d,n} = D/(d^n, r_{d,n})D, u_{d,n} = \bar{1}.$$

とする. $D/rD \cong k[s]_{(s)}$ で $d^{n-2} \notin (d^n, r)$ だから $d^{n-2}u \neq 0$. また $d \in sD$ より $d^{n-1}u \in sN_{d,n}$, $r \notin P$ より $(N_{d,n})_P = 0$.

□

局所化反例の証明：環の構成

証明（続き）

構成した $N_{d,n}$ をすべて足し合わせて

$$M = \bigoplus_{0 \neq d \in \mathfrak{m}, n \geq 2} N_{d,n}, \quad A = D * M$$

とおく．さらに

$$I = (s, 0)A = sD * sM, B = A * A/I$$

とおく．

まず B が HMCM であることを示す．そのためには、 B に parameter element が存在しないことを示せばよい．任意の元を

$$\alpha = ((d, u), x) \in B = (D * M) * A/I$$

と書く．



局所化反例の証明：parameter element がないこと

証明（続き）

$d \in D^\times$ のとき、 $((d, u), x)$ は単元である．したがって parameter element でない．
 $d = 0$ のとき、先ほどと同様に α は冪零元であり、

$$\check{H}^1(\alpha, B) = 0.$$

したがって parameter element でない．

残る場合 $0 \neq d \in \mathfrak{m}$ を考える．任意の $n \geq 2$ について、構成した元 $u_{d,n} \in N_{d,n} \subset M$ を用い、

$$b_n = (0, u_{d,n}) \in A, \beta_n = (b_n, 0) \in B$$

とおく．



局所化反例の証明：parameter element がないこと

証明（続き）

$a = (d, u) \in A$ と書くと、任意の $r \geq 0$ で

$$a^r b_n = (0, d^r u_{d,n})$$

である。したがって

$$a^n b_n = 0, a^{n-1} b_n = (0, d^{n-1} u_{d,n}) \in sD * sM = I.$$

この二つの関係から $\alpha = (a, x) = ((d, u), x)$ に対して

$$\alpha^n \beta_n = (a^n, na^{n-1}x)(b_n, 0) = (a^n b_n, na^{n-1} b_n x) = 0$$

となる。すなわち $\beta_n \in \text{Ann}_B(\alpha^n)$ である。

一方で、 $\alpha^{n-2} \beta_n$ の第 1 成分は

$$a^{n-2} b_n = (0, d^{n-2} u_{d,n}),$$

これは $N_{d,n}$ の構成により 0 でない。よって $\alpha^{n-2} \text{Ann}_B(\alpha^n) \neq 0$ であり、 α は弱副正則でない。 □

局所化反例の証明：HMCM 性と局所化

証明（続き）

以上より、 B には parameter element が存在しない。したがって非空な強パラメータ列も存在せず、 B は HMCM である。

次に局所化を見る。 $p = P * M \in \text{Spec } A$, $q = p * A/I \in \text{Spec } B$ とする。構成により $(N_{d,n})_P = 0$ なので

$$M_P = 0, A_P \cong D_P.$$

また $I_P = (s, 0)A_P$ は sD_P に対応するから

$$(A/I)_P \cong D_P/sD_P.$$

従って

$$B_q \cong A_P * (A/I)_P \cong D_P * D_P/sD_P.$$



局所化反例の証明：結論

証明（続き）

ここで $s \in \text{Reg}(D_P)$ かつ $s \notin D_P^\times$ である．Prop. 6 を

$$A = D_P, a = s$$

に適用すると，

$$D_P * D_P / sD_P$$

は HMCM でない．

以上より，構成した B, q について

B は HMCM だが， B_q は HMCM でない．

すなわち HMCM 性は局所化で一般には保存されない．



- [And26] R. Ando (2026) “Polynomial Extensions of Non-Noetherian Cohen–Macaulay Rings and Torsion-Free Localization”, <https://arxiv.org/abs/2606.25384>.
- [HM07] T. D. Hamilton and T. Marley (2007) “Non-Noetherian Cohen–Macaulay rings”, *J. Algebra*, Vol. 307, No. 1, pp. 343–360, DOI: 10.1016/j.jalgebra.2006.08.003.
- [KW20] Y. Kim and A. Walker (2020) “A note on Non-Noetherian Cohen–Macaulay rings”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 148, No. 3, pp. 1031–1042, DOI: 10.1090/proc/14836.
- [MSS18] A. Mahdikhani, P. Sahandi, and N. Shirmohammadi (2018) “Cohen–Macaulayness of trivial extensions”, *J. Algebra Appl.*, Vol. 17, No. 1, pp. 1850008, 15.
- [Nag62] M. Nagata (1962) *Local rings*, Vol. No. 13 of Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics : Interscience Publishers (a division of John Wiley & Sons, Inc.), New York-London, pp.xiii+234.
- [Sch03] P. Schenzel (2003) “Proregular sequences, local cohomology, and completion”, *Math. Scand.*, Vol. 92, No. 2, pp. 161–180, DOI: 10.7146/math.scand.a-14399.